Matemáticas I
Derivadas

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

October 16, 2014

Supongamos que queremos hallar la recta tangente a una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

Secantes y tangentes

Supongamos que queremos hallar la recta tangente a una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

En principio, parece que nos falta un dato ya que una recta no queda determinada por un solo punto.

Secantes y tangentes

Supongamos que queremos hallar la recta tangente a una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

En principio, parece que nos falta un dato ya que una recta no queda determinada por un solo punto.

Para determinar una recta necesitamos dos puntos o un punto y la pendiente.

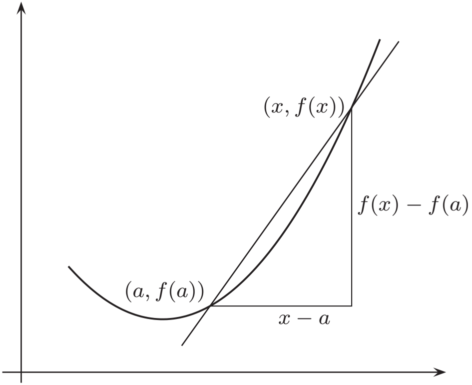
Secantes y tangentes

Supongamos que queremos hallar la recta tangente a una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

En principio, parece que nos falta un dato ya que una recta no queda determinada por un solo punto.

Para determinar una recta necesitamos dos puntos o un punto y la pendiente.

La estrategia consiste en aproximar la tangente por rectas secantes cuyas pendientes sí pueden calcularse directamente.



Una recta secante

Tangente a una curva

En particular, consideremos la recta que une el punto $(a, f(a))$ con un punto cercano, $(x, f(x))$, de la gráfica de f. Esta recta se llama una secante (recta que corta a la curva, pero no es tangente a la curva).

Tangente a una curva

En particular, consideremos la recta que une el punto $(a, f(a))$ con un punto cercano, $(x, f(x))$, de la gráfica de f. Esta recta se llama una secante (recta que corta a la curva, pero no es tangente a la curva).La pendiente de esta secante es:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En particular, consideremos la recta que une el punto $(a, f(a))$ con un punto cercano, $(x, f(x))$, de la gráfica de f. Esta recta se llama una secante (recta que corta a la curva, pero no es tangente a la curva).La pendiente de esta secante es:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cuando el punto x se aproxima *"infinitamente"* al punto a, la pendiente de la tangente vendrá dada por:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Razón de cambio promedio

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable “dependiente” y con otra variable “independiente” x, lo que suele escribirse en la forma $y = f(x)$.

Razón de cambio promedio

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable “dependiente” y con otra variable “independiente” x, lo que suele escribirse en la forma $y = f(x)$.

Si la variable independiente cambia de un valor inicial a a otro x, la variable y lo hace de $f(a)$ a $f(x)$.

Razón de cambio promedio

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable “dependiente” y con otra variable “independiente” x, lo que suele escribirse en la forma $y = f(x)$.

Si la variable independiente cambia de un valor inicial a a otro x, la variable y lo hace de $f(a)$ a $f(x)$.

La *razón de cambio promedio de* $y = f(x)$ *con respecto a* x *en el intervalo* $[a, x]$ es:

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Razón de cambio puntual

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar "*razón de cambio puntual de* $y = f(x)$ *con respecto a* x *en el punto* a" como:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra I representará un intervalo de números reales.

Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra I representará un intervalo de números reales.Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra I representará un intervalo de números reales.Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dicho límite se llama **derivada de** f **en** a y lo representaremos por $f'(a)$ (notación debida a Lagrange).

Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra I representará un intervalo de números reales.Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dicho límite se llama **derivada de** f **en** a y lo representaremos por $f'(a)$ (notación debida a Lagrange).

El límite anterior se puede escribir también de la forma:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra I representará un intervalo de números reales.Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dicho límite se llama **derivada de** f **en** a y lo representaremos por $f'(a)$ (notación debida a Lagrange).

El límite anterior se puede escribir también de la forma:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto de I, la **función derivada** de f es la función $f' : I \to \mathbb{R}$ que a cada punto $x \in I$ hace corresponder la derivada de f en dicho punto.

Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra I representará un intervalo de números reales.Se dice que una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dicho límite se llama **derivada de** f **en** a y lo representaremos por $f'(a)$ (notación debida a Lagrange).

El límite anterior se puede escribir también de la forma:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Dada una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en todo punto de I, la **función derivada** de f es la función $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada punto $x \in I$ hace corresponder la derivada de f en dicho punto.

La notación $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ para representar la derivada de f en x es debida a Leibniz.

Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra I representará un intervalo de números reales.Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dicho límite se llama **derivada de** f **en** a y lo representaremos por $f'(a)$ (notación debida a Lagrange).

El límite anterior se puede escribir también de la forma:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto de I, la **función derivada** de f es la función $f' : I \to \mathbb{R}$ que a cada punto $x \in I$ hace corresponder la derivada de f en dicho punto.

La notación $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ para representar la derivada de f en x es debida a Leibniz.

Toda función derivable en un punto es continua en dicho punto.

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si la función derivada f' también es derivable en I decimos que f es *dos veces derivable* en I y la función $f'' := (f')'$ se llama ***derivada segunda*** de f en I.

Derivadas sucesivas

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si la función derivada f' también es derivable en I decimos que f es *dos veces derivable* en I y la función $f'' := (f')'$ se llama ***derivada segunda*** de f en I.

En general, si $n \in \mathbb{N}$, decimos que f es $n+1$ *veces derivable* en I si f es n veces derivable en I y la función derivada de orden n de f en I, que representaremos por $f^{(n}$, es derivable en I; en cuyo caso la función $f^{(n+1} = (f^{(n)})'$ se llama *derivada de orden* $n+1$ de f en I.

Supuesto que f es derivable en a, la recta de ecuación cartesiana:

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

se llama **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, y también recta tangente a f en $x = a$.

Rectas tangente y normal

Supuesto que f es derivable en a, la recta de ecuación cartesiana:

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

se llama **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, y también recta tangente a f en $x = a$.

Cuando $f'(a) \neq 0$, la recta de ecuación:

$$\boxed{y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)}$$

es la **recta normal** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, y también recta normal a f en $x = a$

Derivadas laterales

Se dice que f es **derivable por la izquierda en** a si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la izquierda** de f en a.

Derivadas laterales

Se dice que f es **derivable por la izquierda en** a si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la izquierda** de f en a.

Se dice que f es **derivable por la derecha en** a, si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la derecha** de f en a.

Relación entre la derivada y las derivadas laterales

- Si $a = \max I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la izquierda de f en a.

Relación entre la derivada y las derivadas laterales

- Si $a = \max I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la izquierda de f en a.
- Si $a = \min I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la derecha de f en a.

Relación entre la derivada y las derivadas laterales

- Si $a = \max I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la izquierda de f en a.
- Si $a = \min I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la derecha de f en a.
- Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:

Relación entre la derivada y las derivadas laterales

- Si $a = \max I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la izquierda de f en a.
- Si $a = \min I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la derecha de f en a.
- Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:

  ◇ f es derivable en a.

Relación entre la derivada y las derivadas laterales

- Si $a = \max I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la izquierda de f en a.
- Si $a = \min I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la derecha de f en a.
- Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:
  - ◇ f es derivable en a.
  - ◇ Las derivadas por la izquierda y por la derecha de f en a existen y coinciden.

La funciones suma, $f+g$, y producto, fg, son derivables en todo punto $a\in I$ en el que f y g sean derivables, y las derivadas respectivas vienen dadas por:

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a); \quad (fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

Derivadas de sumas, productos y cocientes

La funciones suma, $f+g$, y producto, fg, son derivables en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables, y las derivadas respectivas vienen dadas por:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a); \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

La función cociente f/g es derivable en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables, en cuyo caso se verifica que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

La funciones suma, $f+g$, y producto, fg, son derivables en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables, y las derivadas respectivas vienen dadas por:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a); \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

La función cociente f/g es derivable en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables, en cuyo caso se verifica que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Las funciones polinómicas son derivables en todo punto y las funciones racionales son derivables en todo punto de su conjunto natural de definición.

Sean $f:I\to\mathbb{R}$ y $g:J\to\mathbb{R}$ con $f(I)\subset J$, y sea $h=g\circ f:I\to\mathbb{R}$ la función compuesta. Supongamos que f es derivable en $a\in I$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces h es derivable en a y

$$h'(a)=g'(f(a))f'(a).$$

Derivación de una función compuesta o regla de la cadena

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subset J$, y sea $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ la función compuesta. Supongamos que f es derivable en $a \in I$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces h es derivable en a y

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

En particular, la composición de funciones derivables es una función derivable.

Derivación de una función compuesta o regla de la cadena

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subset J$, y sea $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ la función compuesta. Supongamos que f es derivable en $a \in I$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces h es derivable en a y

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

En particular, la composición de funciones derivables es una función derivable.

La regla práctica es que una composición de funciones se deriva de forma inversa a como se evalúa.

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subset J$, y sea $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ la función compuesta. Supongamos que f es derivable en $a \in I$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces h es derivable en a y

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

En particular, la composición de funciones derivables es una función derivable.

La regla práctica es que una composición de funciones se deriva de forma inversa a como se evalúa.

$$(u \circ v \circ w)'(x) = u'(v(w(x))v'(w(x))w'(x)$$

Derivadas de la exponencial y del logaritmo

La función exponencial $x \mapsto \exp(x) = e^x$, $(x \in \mathbb{R})$, y la función logaritmo natural $x \mapsto \ln x$, $(x \in \mathbb{R}^+)$, son derivables en todo punto de sus respectivos intervalos de definición, siendo:

$$(\exp)'(x) = \exp x \quad (\forall x \in \mathbb{R}), \qquad (\ln)'(x) = \frac{1}{x} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$$

Derivadas de la exponencial y del logaritmo

La función exponencial $x \mapsto \exp(x) = e^x$, $(x \in \mathbb{R})$, y la función logaritmo natural $x \mapsto \ln x$, $(x \in \mathbb{R}^+)$, son derivables en todo punto de sus respectivos intervalos de definición, siendo:

$$(\exp)'(x) = \exp x \quad (\forall x \in \mathbb{R}), \qquad (\ln)'(x) = \frac{1}{x} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$$

En particular, se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

La función exponencial $x \mapsto \exp(x) = e^x$, $(x \in \mathbb{R})$, y la función logaritmo natural $x \mapsto \ln x$, $(x \in \mathbb{R}^+)$, son derivables en todo punto de sus respectivos intervalos de definición, siendo:

$$(\exp)'(x) = \exp x \quad (\forall x \in \mathbb{R}), \qquad (\ln)'(x) = \frac{1}{x} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$$

En particular, se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e}$$

Criterio de equivalencia logarítmica

Este resultado es muy útil y permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “0∞”.

Criterio de equivalencia logarítmica

Este resultado es muy útil y permite resolver en muchos casos las indeterminaciones "1^{∞}" y "0∞".

Supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) = 1$. Entonces se verifica que:

Criterio de equivalencia logarítmica

Este resultado es muy útil y permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “0∞”.

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$. Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^L \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)=L}$$

Criterio de equivalencia logarítmica

Este resultado es muy útil y permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “0∞”.

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$. Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = L}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = +\infty}$$

Criterio de equivalencia logarítmica

Este resultado es muy útil y permite resolver en muchos casos las indeterminaciones "1^{∞}" y "0∞".

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$. Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{L} \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = L}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0 \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = -\infty}$$

Derivación logarítmica

Una función positiva g es derivable en a si, y sólo si, la función $\varphi(x) = \ln(g(x))$ es derivable en a en cuyo caso:

$$g'(a) = \varphi'(a)g(a)$$

Derivación logarítmica

Una función positiva g es derivable en a si, y sólo si, la función $\varphi(x) = \ln(g(x))$ es derivable en a en cuyo caso:

$$g'(a) = \varphi'(a)g(a)$$

Una función f es derivable en a si, y sólo si, la función $h(x) = \exp(f(x))$ es derivable en a en cuyo caso:

$$f'(a) = h'(a)\exp(-f(a))$$

Derivación logarítmica

Una función positiva g es derivable en a si, y sólo si, la función $\varphi(x) = \ln(g(x))$ es derivable en a en cuyo caso:

$$g'(a) = \varphi'(a)g(a)$$

Una función f es derivable en a si, y sólo si, la función $h(x) = \exp(f(x))$ es derivable en a en cuyo caso:

$$f'(a) = h'(a)\exp(-f(a))$$

Si f y g son derivables la función $\psi(x) = g(x)^{f(x)}$ también es derivable.

Derivación logarítmica

Una función positiva g es derivable en a si, y sólo si, la función $\varphi(x) = \ln(g(x))$ es derivable en a en cuyo caso:

$$g'(a) = \varphi'(a)g(a)$$

Una función f es derivable en a si, y sólo si, la función $h(x) = \exp(f(x))$ es derivable en a en cuyo caso:

$$f'(a) = h'(a)\exp(-f(a))$$

Si f y g son derivables la función $\psi(x) = g(x)^{f(x)}$ también es derivable.Derivando la función

$$\ln(\psi(x)) = f(x)\ln(g(x))$$

se obtiene:

$$\boxed{\psi'(x) = \psi(x)\left(\ln(g(x))f'(x) + f(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right)}$$

Derivadas de las funciones trigonométricas

Las funciones seno y coseno son derivables en todo punto verificándose que:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x \qquad \cos'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

Derivadas de las funciones trigonométricas

Las funciones seno y coseno son derivables en todo punto verificándose que:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x \qquad \cos'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

En particular, se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.}$$

Derivadas de las funciones trigonométricas

Las funciones seno y coseno son derivables en todo punto verificándose que:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x \qquad \cos'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

En particular, se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.}$$

Las derivadas de las demás funciones trigonométricas se deducen con facilidad a partir de las derivadas del seno y del coseno.

Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Hay algún número $r > 0$ tal que $]a - r, a + r[\subset I$.

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Hay algún número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset I$.

2) Para todo $x \in]a-r, a+r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$.

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Hay algún número $r > 0$ tal que $]a - r, a + r[\subset I$.

2) Para todo $x \in]a - r, a + r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$.

Si para todo $x \in]a - r, a + r[$ con $x \neq a$ se verifica que $f(x) < f(a)$ se dice que el máximo relativo es *estricto*.
Análogamente se define el concepto de *“mínimo relativo”*.

Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Hay algún número $r > 0$ tal que $]a - r, a + r[\subset I$.

2) Para todo $x \in]a - r, a + r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$.

Si para todo $x \in]a - r, a + r[$ con $x \neq a$ se verifica que $f(x) < f(a)$ se dice que el máximo relativo es *estricto*.
Análogamente se define el concepto de *"mínimo relativo"*.

La expresión *extremo relativo* se utiliza para referirse indistintamente a un máximo o a un mínimo relativo.

Condición necesaria de extremo relativo

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un *extremo relativo* en a y que f *es derivable en* a. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

Condición necesaria de extremo relativo

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un *extremo relativo* en a y que f *es derivable en* a. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

El resultado anterior es uno de los que peor se interpretan debido a que suelen olvidarse sus hipótesis, que son dos:

Condición necesaria de extremo relativo

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un *extremo relativo* en a y que f *es derivable en* a. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

El resultado anterior es uno de los que peor se interpretan debido a que suelen olvidarse sus hipótesis, que son dos:

- Que el punto a sea un extremo relativo de f.

Condición necesaria de extremo relativo

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un *extremo relativo* en a y que f *es derivable en* a. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

El resultado anterior es uno de los que peor se interpretan debido a que suelen olvidarse sus hipótesis, que son dos:

- Que el punto a sea un extremo relativo de f.
- Que f sea derivable en a.

Condición necesaria de extremo relativo

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un *extremo relativo* en a y que f *es derivable en* a. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

El resultado anterior es uno de los que peor se interpretan debido a que suelen olvidarse sus hipótesis, que son dos:

- Que el punto a sea un extremo relativo de f.
- Que f sea derivable en a.

La expresión “como f tiene un extremo en a, su derivada debe anularse en a” no es, en general, correcta. Los siguientes ejemplos lo dejan bien claro:

Condición necesaria de extremo relativo

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un *extremo relativo* en a y que f *es derivable en* a. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

El resultado anterior es uno de los que peor se interpretan debido a que suelen olvidarse sus hipótesis, que son dos:

- Que el punto a sea un extremo relativo de f.
- Que f sea derivable en a.

La expresión "como f tiene un extremo en a, su derivada debe anularse en a" no es, en general, correcta. Los siguientes ejemplos lo dejan bien claro:

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$, tiene claramente un mínimo relativo (y también absoluto) en 0, pero no es derivable en 0, por lo que no tiene sentido decir que su derivada se anula en 0.

Condición necesaria de extremo relativo

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un *extremo relativo* en a y que f *es derivable en* a. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

El resultado anterior es uno de los que peor se interpretan debido a que suelen olvidarse sus hipótesis, que son dos:

- Que el punto a sea un extremo relativo de f.
- Que f sea derivable en a.

La expresión "como f tiene un extremo en a, su derivada debe anularse en a" no es, en general, correcta. Los siguientes ejemplos lo dejan bien claro:

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$, tiene claramente un mínimo relativo (y también absoluto) en 0, pero no es derivable en 0, por lo que no tiene sentido decir que su derivada se anula en 0.

La función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, es estrictamente creciente, es derivable en todo punto y su derivada solamente se anula en $x = 0$. Tiene un mínimo absoluto en -1 y un máximo absoluto en 1; dichos puntos no son extremos relativos de la función. Este ejemplo también muestra que la condición necesaria de extremo relativo no es suficiente.

Condición necesaria de extremo relativo

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un *extremo relativo* en a y que *f es derivable en a*. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

El resultado anterior es uno de los que peor se interpretan debido a que suelen olvidarse sus hipótesis, que son dos:

- Que el punto a sea un extremo relativo de f.
- Que f sea derivable en a.

La expresión "como f tiene un extremo en a, su derivada debe anularse en a" no es, en general, correcta. Los siguientes ejemplos lo dejan bien claro:

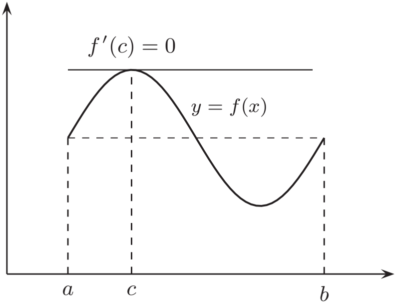
La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$, tiene claramente un mínimo relativo (y también absoluto) en 0, pero no es derivable en 0, por lo que no tiene sentido decir que su derivada se anula en 0.

La función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, es estrictamente creciente, es derivable en todo punto y su derivada solamente se anula en $x = 0$. Tiene un mínimo absoluto en -1 y un máximo absoluto en 1; dichos puntos no son extremos relativos de la función. Este ejemplo también muestra que la condición necesaria de extremo relativo no es suficiente.

Los puntos en los que se anula la derivada de una función se llaman **puntos críticos** o **puntos singulares** de dicha función.

Teorema de Rolle

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verificando que $f(a) = f(b)$. Entonces existe algún punto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.



Teorema de Rolle

Ceros de una función

Los puntos en los que se anula una función se llaman *ceros* de dicha función. Para estudiar *cuántas* soluciones tiene una ecuación de la forma $f(x) = g(x)$ donde f y g son funciones definidas y con derivadas de todos órdenes en un intervalo I (que a veces deberás elegir tú mismo), lo que se hace es estudiar cuántos ceros tiene la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

Ceros de una función

Los puntos en los que se anula una función se llaman *ceros* de dicha función. Para estudiar *cuántas* soluciones tiene una ecuación de la forma $f(x) = g(x)$ donde f y g son funciones definidas y con derivadas de todos órdenes en un intervalo I (que a veces deberás elegir tú mismo), lo que se hace es estudiar cuántos ceros tiene la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

El teorema de los ceros de Bolzano, junto con el teorema de Rolle, permiten determinar en muchas ocasiones el número de ceros reales de una función.

Ceros de una función

Los puntos en los que se anula una función se llaman *ceros* de dicha función. Para estudiar *cuántas* soluciones tiene una ecuación de la forma $f(x) = g(x)$ donde f y g son funciones definidas y con derivadas de todos órdenes en un intervalo I (que a veces deberás elegir tú mismo), lo que se hace es estudiar cuántos ceros tiene la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

El teorema de los ceros de Bolzano, junto con el teorema de Rolle, permiten determinar en muchas ocasiones el número de ceros reales de una función.

El teorema de Bolzano nos dice que entre cada dos puntos en los que se produce un cambio de signo de una función continua en un intervalo hay ***por lo menos*** un cero de dicha función.

Ceros de una función

Los puntos en los que se anula una función se llaman *ceros* de dicha función. Para estudiar *cuántas* soluciones tiene una ecuación de la forma $f(x) = g(x)$ donde f y g son funciones definidas y con derivadas de todos órdenes en un intervalo I (que a veces deberás elegir tú mismo), lo que se hace es estudiar cuántos ceros tiene la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

El teorema de los ceros de Bolzano, junto con el teorema de Rolle, permiten determinar en muchas ocasiones el número de ceros reales de una función.

El teorema de Bolzano nos dice que entre cada dos puntos en los que se produce un cambio de signo de una función continua en un intervalo hay ***por lo menos*** un cero de dicha función.

Ceros de una función

El teorema de Rolle nos dice que entre cada dos ceros de una función derivable en un intervalo hay ***por lo menos*** un cero de la derivada de dicha función.

Ceros de una función

El teorema de Rolle nos dice que entre cada dos ceros de una función derivable en un intervalo hay ***por lo menos*** un cero de la derivada de dicha función.

Del teorema de Rolle deducimos que si una función derivable en un intervalo se anula en n puntos, su derivada se anula en ***por lo menos*** $n-1$ puntos; su derivada segunda se anula en ***por lo menos*** $n-2$ puntos y, en general, su derivada de orden k, donde $k = 1, 2, \dots, n-1$, se anula en ***por lo menos*** $n-k$ puntos.

Ceros de una función

El teorema de Rolle nos dice que entre cada dos ceros de una función derivable en un intervalo hay ***por lo menos*** un cero de la derivada de dicha función.

Del teorema de Rolle deducimos que si una función derivable en un intervalo se anula en n puntos, su derivada se anula en ***por lo menos*** $n-1$ puntos; su derivada segunda se anula en ***por lo menos*** $n-2$ puntos y, en general, su derivada de orden k, donde $k=1,2,\dots,n-1$, se anula en ***por lo menos*** $n-k$ puntos.

Del teorema de Rolle deducimos también que *si la derivada de una función se anula en exactamente k puntos, donde $k=0,1,2,\dots$, la función tiene **como máximo** $k+1$ ceros*.

Ceros de una función

El teorema de Rolle nos dice que entre cada dos ceros de una función derivable en un intervalo hay ***por lo menos*** un cero de la derivada de dicha función.

Del teorema de Rolle deducimos que si una función derivable en un intervalo se anula en n puntos, su derivada se anula en ***por lo menos*** $n-1$ puntos; su derivada segunda se anula en ***por lo menos*** $n-2$ puntos y, en general, su derivada de orden k, donde $k = 1, 2, ..., n-1$, se anula en ***por lo menos*** $n-k$ puntos.

Del teorema de Rolle deducimos también que *si la derivada de una función se anula en exactamente k puntos, donde $k = 0, 1, 2, ...$, la función tiene **como máximo** $k+1$ ceros*.

Este resultado podemos aplicarlo *hacia atrás*, es decir, si sabemos, por ejemplo, que la derivada tercera se anula solamente en un punto, deducimos que la derivada segunda puede anularse ***como máximo*** en dos puntos, que la derivada primera puede anularse ***como máximo*** en tres puntos y que la función puede anularse ***como máximo*** en cuatro puntos. En general, si la derivada de orden n de una función se anula exactamente en k puntos la función se anula ***como máximo*** en $n+k$ puntos.

Ceros de las funciones polinómicas.

Se dice que **una función polinómica** $P(x)$ **tiene un cero de orden** $k \geqslant 1$ en un punto a, si el valor de P y el de sus derivadas hasta la de orden $k-1$ en a es cero, y la derivada de orden k de P no se anula en a.

Ceros de las funciones polinómicas.

Se dice que **una función polinómica** $P(x)$ **tiene un cero de orden** $k \geqslant 1$ en un punto a, si el valor de P y el de sus derivadas hasta la de orden $k-1$ en a es cero, y la derivada de orden k de P no se anula en a.

Los ceros de orden 1 se llaman **ceros simples**. El Teorema Fundamental del Álgebra dice que *contando cada raíz tantas veces como indica su orden* una función polinómica de grado n (en general, con coeficientes complejos) tiene n raíces reales o complejas.

Se dice que **una función polinómica** $P(x)$ **tiene un cero de orden** $k \geqslant 1$ en un punto a, si el valor de P y el de sus derivadas hasta la de orden $k-1$ en a es cero, y la derivada de orden k de P no se anula en a.

Los ceros de orden 1 se llaman **ceros simples**. El Teorema Fundamental del Álgebra dice que *contando cada raíz tantas veces como indica su orden* una función polinómica de grado n (en general, con coeficientes complejos) tiene n raíces reales o complejas.

Recuerda también que las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales vienen por pares de raíces complejas conjugadas. Teniendo en cuenta que agrupando cada raíz compleja con su conjugada aparecen factores del tipo $x^2 + bx + c$ con discriminante negativo, se deduce que:

Ceros de las funciones polinómicas.

Se dice que **una función polinómica** $P(x)$ **tiene un cero de orden** $k \geqslant 1$ en un punto a, si el valor de P y el de sus derivadas hasta la de orden $k - 1$ en a es cero, y la derivada de orden k de P no se anula en a.

Los ceros de orden 1 se llaman **ceros simples**. El Teorema Fundamental del Álgebra dice que *contando cada raíz tantas veces como indica su orden* una función polinómica de grado n (en general, con coeficientes complejos) tiene n raíces reales o complejas.

Recuerda también que las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales vienen por pares de raíces complejas conjugadas. Teniendo en cuenta que agrupando cada raíz compleja con su conjugada aparecen factores del tipo $x^2 + bx + c$ con discriminante negativo, se deduce que:

a) Una función polinómica de grado impar tiene *contando cada raíz tantas veces como indica su orden* un número impar de raíces reales y sabemos que por lo menos tiene una.

Ceros de las funciones polinómicas.

Se dice que **una función polinómica** $P(x)$ **tiene un cero de orden** $k \geqslant 1$ en un punto a, si el valor de P y el de sus derivadas hasta la de orden $k-1$ en a es cero, y la derivada de orden k de P no se anula en a.

Los ceros de orden 1 se llaman **ceros simples**. El Teorema Fundamental del Álgebra dice que *contando cada raíz tantas veces como indica su orden* una función polinómica de grado n (en general, con coeficientes complejos) tiene n raíces reales o complejas.

Recuerda también que las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales vienen por pares de raíces complejas conjugadas. Teniendo en cuenta que agrupando cada raíz compleja con su conjugada aparecen factores del tipo $x^2 + bx + c$ con discriminante negativo, se deduce que:

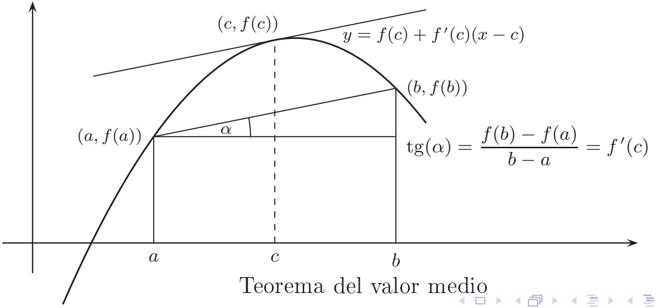
a) Una función polinómica de grado impar tiene *contando cada raíz tantas veces como indica su orden* un número impar de raíces reales y sabemos que por lo menos tiene una.

b) Una función polinómica de grado par tiene *contando cada raíz tantas veces como indica su orden* un número par de raíces reales y puede ocurrir que no tenga ninguna.

Teorema del valor medio

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Entonces existe algún punto $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Teorema del valor medio

Sea f una función derivable en un intervalo I, y supongamos que existe $M \geqslant 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$. Entonces se verifica que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \qquad \text{para todos } x, y \in I$$

En particular, si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces f es constante en I.

Consecuencias del teorema del valor medio

Sea I un intervalo, $a \in I$ y f una función continua en I y derivable en $I \setminus \{a\}$.

Consecuencias del teorema del valor medio

Sea I un intervalo, $a \in I$ y f una función continua en I y derivable en $I \setminus \{a\}$.Si la función derivada f' tiene límite por la derecha (resp. por la izquierda) en a entonces f es derivable por la derecha (resp. por la izquierda) en a con derivada por la derecha (resp. por la izquierda) en a igual al valor de dicho límite.

Consecuencias del teorema del valor medio

Sea I un intervalo, $a \in I$ y f una función continua en I y derivable en $I \setminus \{a\}$.Si la función derivada f' tiene límite por la derecha (resp. por la izquierda) en a entonces f es derivable por la derecha (resp. por la izquierda) en a con derivada por la derecha (resp. por la izquierda) en a igual al valor de dicho límite.

En particular, si existe $\lim_{x \to a} f'(x) = L$ entonces f es derivable en a y $f'(a) = L$.

Consecuencias del teorema del valor medio

Sea I un intervalo, $a \in I$ y f una función continua en I y derivable en $I \setminus \{a\}$.Si la función derivada f' tiene límite por la derecha (resp. por la izquierda) en a entonces f es derivable por la derecha (resp. por la izquierda) en a con derivada por la derecha (resp. por la izquierda) en a igual al valor de dicho límite.

En particular, si existe $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = L$ entonces f es derivable en a y $f'(a) = L$.

En consecuencia:

Consecuencias del teorema del valor medio

Sea I un intervalo, $a \in I$ y f una función continua en I y derivable en $I \setminus \{a\}$.Si la función derivada f' tiene límite por la derecha (resp. por la izquierda) en a entonces f es derivable por la derecha (resp. por la izquierda) en a con derivada por la derecha (resp. por la izquierda) en a igual al valor de dicho límite.

En particular, si existe $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = L$ entonces f es derivable en a y $f'(a) = L$.

En consecuencia:

Las funciones derivadas definidas en intervalos no tienen discontinuidades evitables ni de salto.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Se verifica entonces que:

Derivabilidad y monotonía

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Se verifica entonces que:

- f es creciente en I si, y sólo si, $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a, b[$.

Derivabilidad y monotonía

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Se verifica entonces que:

- f es creciente en I si, y sólo si, $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a, b[$.
- f es decreciente en I si, y sólo si, $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]a, b[$.

Derivabilidad y monotonía

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Se verifica entonces que:

- f es creciente en I si, y sólo si, $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a, b[$.
- f es decreciente en I si, y sólo si, $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]a, b[$.
- Si para todo $x \in]a, b[$ es $f'(x) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en $[a, b]$.

Derivabilidad y monotonía

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Se verifica entonces que:

- f es creciente en I si, y sólo si, $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a, b[$.
- f es decreciente en I si, y sólo si, $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]a, b[$.
- Si para todo $x \in]a, b[$ es $f'(x) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en $[a, b]$.
- Si para todo $x \in]a, b[$ es $f'(x) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.

Estrategia para probar desigualdades

El teorema del valor medio permite acotar el incremento de una función por el incremento de la variable y una cota de la derivada. Esto da lugar a muchas desigualdades interesantes.

Estrategia para probar desigualdades

El teorema del valor medio permite acotar el incremento de una función por el incremento de la variable y una cota de la derivada. Esto da lugar a muchas desigualdades interesantes.

Para probar una desigualdad del tipo $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \geqslant a$, donde f y g son funciones derivables. Se hace lo siguiente:

Estrategia para probar desigualdades

El teorema del valor medio permite acotar el incremento de una función por el incremento de la variable y una cota de la derivada. Esto da lugar a muchas desigualdades interesantes.

Para probar una desigualdad del tipo $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \geqslant a$, donde f y g son funciones derivables. Se hace lo siguiente:

- Se define $h(x) = g(x) - f(x)$ y se comprueba que $h(a) = 0$.

Estrategia para probar desigualdades

El teorema del valor medio permite acotar el incremento de una función por el incremento de la variable y una cota de la derivada. Esto da lugar a muchas desigualdades interesantes.

Para probar una desigualdad del tipo $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \geqslant a$, donde f y g son funciones derivables. Se hace lo siguiente:

- Se define $h(x) = g(x) - f(x)$ y se comprueba que $h(a) = 0$.
- Se comprueba que $h'(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$.

Estrategia para probar desigualdades

El teorema del valor medio permite acotar el incremento de una función por el incremento de la variable y una cota de la derivada. Esto da lugar a muchas desigualdades interesantes.

Para probar una desigualdad del tipo $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \geqslant a$, donde f y g son funciones derivables. Se hace lo siguiente:

- Se define $h(x) = g(x) - f(x)$ y se comprueba que $h(a) = 0$.
- Se comprueba que $h'(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$.

Esta última desigualdad implica que h es creciente en $[a, +\infty[$ y, como $h(a) = 0$, concluimos que $h(x) \geqslant 0$, es decir, $g(x) - f(x) \geqslant 0$, para todo $x \geqslant a$.

Estrategia para probar desigualdades

Naturalmente, los detalles pueden cambiar. Puede que el punto a debas elegirlo tú. Es una estrategia que tiene éxito cuando la desigualdad $h'(x) \geqslant 0$ es más fácil que la inicial.

Estrategia para probar desigualdades

Naturalmente, los detalles pueden cambiar. Puede que el punto a debas elegirlo tú. Es una estrategia que tiene éxito cuando la desigualdad $h'(x) \geqslant 0$ es más fácil que la inicial.

Puede ocurrir que esta desigualdad siga siendo complicada; entonces podemos aplicarle a ella el mismo procedimiento, comprobamos que $h'(a) = 0$ y que $h''(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$, lo que implica que h' es creciente en $[a, +\infty[$ y, como $h'(a) = 0$, concluimos que $h'(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$.

Estrategia para probar desigualdades

Naturalmente, los detalles pueden cambiar. Puede que el punto a debas elegirlo tú. Es una estrategia que tiene éxito cuando la desigualdad $h'(x) \geqslant 0$ es más fácil que la inicial.

Puede ocurrir que esta desigualdad siga siendo complicada; entonces podemos aplicarle a ella el mismo procedimiento, comprobamos que $h'(a) = 0$ y que $h''(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$, lo que implica que h' es creciente en $[a, +\infty[$ y, como $h'(a) = 0$, concluimos que $h'(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$.

También debes tener en cuenta que probar una desigualdad del tipo $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I$ donde I es un intervalo, y hay un punto $a \in I$ tal que $f(a) = g(a)$, es lo mismo que probar que en el intervalo I la función $h(x) = g(x) - f(x)$ alcanza un mínimo absoluto en el punto a.

Criterio de extremo absoluto

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en todo punto de $]a, b[$ con la posible excepción de un punto $c \in]a, b[$.

Criterio de extremo absoluto

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en todo punto de $]a, b[$ con la posible excepción de un punto $c \in]a, b[$.

- Si $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a, c[$ y $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]c, b[$, entonces f alcanza en c un máximo absoluto en $[a, b]$.

Criterio de extremo absoluto

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en todo punto de $]a, b[$ con la posible excepción de un punto $c \in]a, b[$.

- Si $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a, c[$ y $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]c, b[$, entonces f alcanza en c un máximo absoluto en $[a, b]$.
- Si $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]a, c[$ y $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]c, b[$, entonces f alcanza en c un mínimo absoluto en $[a, b]$.

Derivación de la función inversa

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es una biyección de I sobre el intervalo $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J siendo para todo $y \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

Derivación de la función inversa

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es una biyección de I sobre el intervalo $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J siendo para todo $y \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

La fórmula anterior se recuerda sin más que derivar la identidad:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$$

Derivación de la función inversa

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es una biyección de I sobre el intervalo $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J siendo para todo $y \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

La fórmula anterior se recuerda sin más que derivar la identidad:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$$

Como ejemplo podemos calcular las derivadas de las funciones trigonométricas “inversas”.

Derivación de la función inversa

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es una biyección de I sobre el intervalo $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J siendo para todo $y \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

La fórmula anterior se recuerda sin más que derivar la identidad:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$$

Como ejemplo podemos calcular las derivadas de las funciones trigonométricas "inversas".

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1), \quad \operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Reglas de L'Hôpital

Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a, b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a, b[$. Sea $\alpha \in \{a, b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

Reglas de L'Hôpital

Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$

Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$

Reglas de L'Hôpital

Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

- $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \alpha} |g(x)| = +\infty$

Reglas de L'Hôpital

Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$

Y además

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

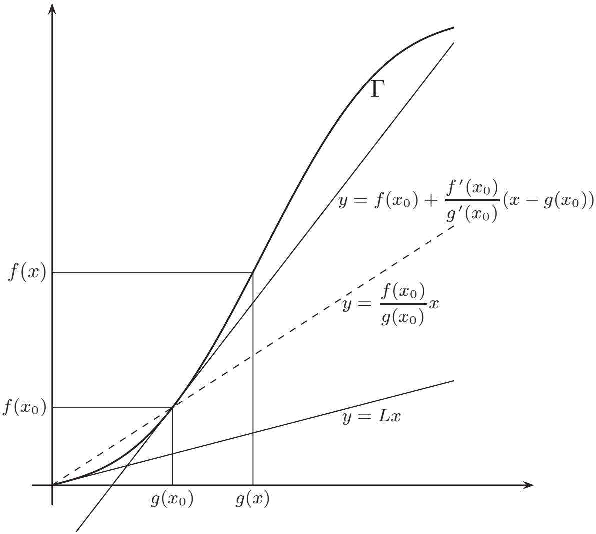
- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$

Y además

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Entonces se verifica que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$



Regla de L'Hôpital

Si n es un número natural, $n \geqslant 2$, decimos que f es *n veces derivable en un punto* $a \in I$, si f es $n-1$ veces derivable en I y la función $f^{(n-1}$ es derivable en a.

Si n es un número natural, $n \geqslant 2$, decimos que f es *n veces derivable en un punto* $a \in I$, si f es $n-1$ veces derivable en I y la función $f^{(n-1}$ es derivable en a.

Se dice que f es una función de clase C^n en I si f es n veces derivable I y la función $f^{(n}$ es continua en I.

Si n es un número natural, $n \geqslant 2$, decimos que f es *n veces derivable en un punto $a \in I$*, si f es $n-1$ veces derivable en I y la función $f^{(n-1}$ es derivable en a.

Se dice que f es una función de clase C^n en I si f es n veces derivable I y la función $f^{(n}$ es continua en I.

Se dice que f es una función de clase C^∞ en I si f tiene derivadas de todos órdenes en I.

Si n es un número natural, $n \geqslant 2$, decimos que f es *n veces derivable en un punto $a \in I$*, si f es $n-1$ veces derivable en I y la función $f^{(n-1}$ es derivable en a.

Se dice que f es una función de clase C^n en I si f es n veces derivable I y la función $f^{(n}$ es continua en I.

Se dice que f es una función de clase C^∞ en I si f tiene derivadas de todos órdenes en I.

Por convenio se define $f^{(0} = f$.

Polinomios de Taylor

Sea f una función n veces derivable en un punto a. La función polinómica $T_n(f,a)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$\boxed{T_n(f,a)(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k}$$

se llama el **polinomio de Taylor de orden n de f en a.**

Teorema de Taylor-Young

Sea f una función n veces derivable en un punto a, y sea $T_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0}$$

Teorema de Taylor-Young

Sea f una función n veces derivable en un punto a, y sea $T_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0}$$

Sea f una función definida en un intervalo I que es $n+1$ veces derivable en un punto $a \in I$, y sea $T_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(f,a)(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)}$$

Polinomios de Taylor de una función y de su derivada

Entre los polinomios de Taylor de una función φ y de su derivada φ' hay la siguiente relación:

$$\boxed{T'_{n+1}(\varphi, a)(x) = T_n(\varphi', a)(x)}$$

Es decir, la derivada del polinomio de Taylor de orden $n+1$ de φ es el polinomio de Taylor de orden n de φ'.

Polinomios de Taylor de una función y de su derivada

Entre los polinomios de Taylor de una función φ y de su derivada φ' hay la siguiente relación:

$$\boxed{T_{n+1}'(\varphi, a)(x) = T_n(\varphi', a)(x)}$$

Es decir, la derivada del polinomio de Taylor de orden $n+1$ de φ es el polinomio de Taylor de orden n de φ'.La igualdad anterior es

interesante *en los dos sentidos* pues permite calcular $T_{n+1}(\varphi, a)(x)$ sin más que calcular *la primitiva o antiderivada* de $T_n(\varphi', a)(x)$ que en el punto a coincida con $\varphi(a)$.

Notación de Landau

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones tales que $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, se escribe $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to a$, y se lee $f(x)$ *es un infinitésimo de orden superior que* $g(x)$ *en el punto* a.

Notación de Landau

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones tales que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, se escribe $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to a$, y se lee $f(x)$ *es un infinitésimo de orden superior que* $g(x)$ *en el punto* a.

Usando la notación de Landau, el teorema de Taylor–Young puede expresarse en la forma:

$$\boxed{f(x) = T_n(f, a)(x) + o(x-a)^n}$$

Polinomios de Taylor en $a = 0$ de las funciones elementales

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o(x^n)$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + o(x^{2n})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + o(x^n)$$

Polinomios de Taylor en $a = 0$ de las funciones elementales

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} x^{2k-1} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{arcsen} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Técnicas para calcular límites de funciones

Las siguientes estrategias son útiles para calcular límites :

Técnicas para calcular límites de funciones

Las siguientes estrategias son útiles para calcular límites :

- Simplifica todo lo que puedas la función.

Técnicas para calcular límites de funciones

Las siguientes estrategias son útiles para calcular límites :

- Simplifica todo lo que puedas la función.
- Reduce el límite a otros bien conocidos.

Técnicas para calcular límites de funciones

Las siguientes estrategias son útiles para calcular límites :

- Simplifica todo lo que puedas la función.
- Reduce el límite a otros bien conocidos.
- Usa las equivalencias asintóticas para sustituir en un **producto** o en un **cociente** de funciones, una de ellas por otra asintóticamente equivalente. ¡Ojo! *En una suma no puedes hacer eso*.

Técnicas para calcular límites de funciones

Las siguientes estrategias son útiles para calcular límites :

- Simplifica todo lo que puedas la función.
- Reduce el límite a otros bien conocidos.
- Usa las equivalencias asintóticas para sustituir en un **producto** o en un **cociente** de funciones, una de ellas por otra asintóticamente equivalente. ¡Ojo! *En una suma no puedes hacer eso*.
- Cada vez que apliques las reglas de L'Hôpital comprueba que puedes hacerlo, es decir que se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$. Cada vez que derives al aplicar dichas reglas debes simplificar la expresión obtenida antes de volver a derivar.

Técnicas para calcular límites de funciones

Las siguientes estrategias son útiles para calcular límites :

- Simplifica todo lo que puedas la función.
- Reduce el límite a otros bien conocidos.
- Usa las equivalencias asintóticas para sustituir en un **producto** o en un **cociente** de funciones, una de ellas por otra asintóticamente equivalente. ¡Ojo! *En una suma no puedes hacer eso*.
- Cada vez que apliques las reglas de L'Hôpital comprueba que puedes hacerlo, es decir que se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$. Cada vez que derives al aplicar dichas reglas debes simplificar la expresión obtenida antes de volver a derivar.
- En general, no descompongas un límite como suma o producto de otros dos, pero si quieres hacerlo tienes que asegurarte de que dichos límites existen.

Técnicas para calcular límites de funciones

Las siguientes estrategias son útiles para calcular límites :

- Simplifica todo lo que puedas la función.
- Reduce el límite a otros bien conocidos.
- Usa las equivalencias asintóticas para sustituir en un **producto** o en un **cociente** de funciones, una de ellas por otra asintóticamente equivalente. ¡Ojo! *En una suma no puedes hacer eso*.
- Cada vez que apliques las reglas de L'Hôpital comprueba que puedes hacerlo, es decir que se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$. Cada vez que derives al aplicar dichas reglas debes simplificar la expresión obtenida antes de volver a derivar.
- En general, no descompongas un límite como suma o producto de otros dos, pero si quieres hacerlo tienes que asegurarte de que dichos límites existen.
- Debes saber usar el criterio de equivalencia logarítmica que resuelve con frecuencia indeterminaciones del tipo 1^{∞} y 0∞.

Límites bien conocidos que debes memorizar

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsen x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\frac{1}{6},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}=\frac{1}{3},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Límites bien conocidos que debes memorizar

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\frac{1}{6},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}=\frac{1}{3},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Esta lista de los límites *bien conocidos* es, de hecho, una lista de equivalencias asintóticas y eso la hace más útil todavía.

Límites que debes memorizar

Sea f cualquier función tal que $f(x) \neq 0$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Entonces se verifica que:

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{arcsen} f(x)}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x \to a} \frac{1 - \cos f(x)}{f(x)^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \to a} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \operatorname{sen} f(x)}{f(x)^3} = \frac{1}{6}, \qquad \lim_{x \to a} \frac{(1 + f(x))^\alpha - 1}{f(x)} = \alpha,$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(1 + f(x))}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{tg} f(x)}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{arctg} f(x)}{f(x)} = 1,$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{tg} f(x) - f(x)}{f(x)^3} = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \ln(1 + f(x))}{f(x)^2} = \frac{1}{2}.$$

No conviene aplicar las reglas de L'Hôpital para calcular derivadas, es decir, límites de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Sobre el mal uso de las reglas de L'Hôpital

No conviene aplicar las reglas de L'Hôpital para calcular derivadas, es decir, límites de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La razón es muy sencilla. Si para calcular el límite anterior usas las reglas de L'Hôpital, lo que haces es calcular el límite $\lim_{x \to a} f'(x)$.

Sobre el mal uso de las reglas de L'Hôpital

No conviene aplicar las reglas de L'Hôpital para calcular derivadas, es decir, límites de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La razón es muy sencilla. Si para calcular el límite anterior usas las reglas de L'Hôpital, lo que haces es calcular el límite $\lim_{x \to a} f'(x)$.Si éste límite es igual a L deducimos que el anterior también es igual a L.

Sobre el mal uso de las reglas de L'Hôpital

No conviene aplicar las reglas de L'Hôpital para calcular derivadas, es decir, límites de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La razón es muy sencilla. Si para calcular el límite anterior usas las reglas de L'Hôpital, lo que haces es calcular el límite $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$.Si éste límite es igual a L deducimos que el anterior también es igual a L.Pero ¡has probado más de lo que se pedía! Acabas de probar que la derivada de f es continua en a, porque has probado que $\lim_{x \to a} f'(x) = L = f'(a)$; y lo que se pedía era solamente calcular la derivada de f en a.

Sobre el mal uso de las reglas de L'Hôpital

No conviene aplicar las reglas de L'Hôpital para calcular derivadas, es decir, límites de la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

La razón es muy sencilla. Si para calcular el límite anterior usas las reglas de L'Hôpital, lo que haces es calcular el límite $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$.Si éste límite es igual a L deducimos que el anterior también es igual a L.Pero ¡has probado más de lo que se pedía! Acabas de probar que la derivada de f es continua en a, porque has probado que $\lim_{x\to a} f'(x) = L = f'(a)$; y lo que se pedía era solamente calcular la derivada de f en a.

Los errores más frecuentes al aplicar L'Hôpital se deben a que **no se comprueban las hipótesis cada vez que aplicamos las reglas**.

Sobre el mal uso de las reglas de L'Hôpital

No conviene aplicar las reglas de L'Hôpital para calcular derivadas, es decir, límites de la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La razón es muy sencilla. Si para calcular el límite anterior usas las reglas de L'Hôpital, lo que haces es calcular el límite $\lim_{x\to a} f'(x)$.Si éste límite es igual a L deducimos que el anterior también es igual a L.Pero ¡has probado más de lo que se pedía! Acabas de probar que la derivada de f es continua en a, porque has probado que $\lim_{x\to a} f'(x) = L = f'(a)$; y lo que se pedía era solamente calcular la derivada de f en a.

Los errores más frecuentes al aplicar L'Hôpital se deben a que **no se comprueban las hipótesis cada vez que aplicamos las reglas**.Es frecuente empezar con una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y, después de aplicar L'Hôpital una vez, no volver a comprobar que seguimos teniendo una indeterminación.

Sobre el mal uso de las reglas de L'Hôpital

No conviene aplicar las reglas de L'Hôpital para calcular derivadas, es decir, límites de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La razón es muy sencilla. Si para calcular el límite anterior usas las reglas de L'Hôpital, lo que haces es calcular el límite $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$.Si éste límite es igual a L deducimos que el anterior también es igual a L.Pero ¡has probado más de lo que se pedía! Acabas de probar que la derivada de f es continua en a, porque has probado que $\lim_{x \to a} f'(x) = L = f'(a)$; y lo que se pedía era solamente calcular la derivada de f en a.

Los errores más frecuentes al aplicar L'Hôpital se deben a que **no se comprueban las hipótesis cada vez que aplicamos las reglas**.Es frecuente empezar con una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y, después de aplicar L'Hôpital una vez, no volver a comprobar que seguimos teniendo una indeterminación.Así que no lo olvides: cada vez que apliques L'Hôpital comprueba que se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y que la derivada del denominador no se anula.

Sobre el uso de la notación $\lim\limits_{x \to a}$

La notación que usamos para límites es tan buena que a veces te hace ver lo que no hay. En cierto sentido la notación “tira de ti”: basta con que escribas “$\lim\limits_{x \to a}$” delante de una función para que *mentalmente hagas la sustitución* $x = a$.

Sobre el uso de la notación $\lim_{x \to a}$

La notación que usamos para límites es tan buena que a veces te hace ver lo que no hay. En cierto sentido la notación "tira de ti": basta con que escribas "$\lim_{x \to a}$" delante de una función para que *mentalmente hagas la sustitución* $x = a$.

Para comprobar esto te propongo un juego: dime en menos de medio segundo el valor del siguiente límite:

La notación que usamos para límites es tan buena que a veces te hace ver lo que no hay. En cierto sentido la notación “tira de ti”: basta con que escribas “ $\lim_{x \to a}$ ” delante de una función para que *mentalmente hagas la sustitución* $x = a$.

Para comprobar esto te propongo un juego: dime en menos de medio segundo el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x}$$

Sobre el uso de la notación $\lim_{x\to a}$

La notación que usamos para límites es tan buena que a veces te hace ver lo que no hay. En cierto sentido la notación "tira de ti": basta con que escribas "$\lim_{x\to a}$" delante de una función para que *mentalmente hagas la sustitución* $x = a$.

Para comprobar esto te propongo un juego: dime en menos de medio segundo el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x}$$

¿Has dudado? ¿Has creído que es una indeterminación tipo $\frac{0}{0}$? Si respondes que sí a estas preguntas es porque has hecho mentalmente la sustitución $x = 0$ en el cociente $\frac{x}{x}$ y has visto lo que no hay.

Sobre el uso de la notación $\lim_{x \to a}$

La notación que usamos para límites es tan buena que a veces te hace ver lo que no hay. En cierto sentido la notación “tira de ti”: basta con que escribas “ $\lim_{x \to a}$ ” delante de una función para que *mentalmente hagas la sustitución* $x = a$.

Para comprobar esto te propongo un juego: dime en menos de medio segundo el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x}$$

¿Has dudado? ¿Has creído que es una indeterminación tipo $\frac{0}{0}$? Si respondes que sí a estas preguntas es porque has hecho mentalmente la sustitución $x = 0$ en el cociente $\frac{x}{x}$ y has visto lo que no hay.Porque, evidentemente, se tiene que $\frac{x}{x} = 1$, es decir, el límite anterior es el límite de la función constante igual a 1. No hay ninguna indeterminación.

Sobre el uso de la notación $\lim_{x \to a}$

La notación que usamos para límites es tan buena que a veces te hace ver lo que no hay. En cierto sentido la notación “tira de ti”: basta con que escribas “ $\lim_{x \to a}$ ” delante de una función para que *mentalmente hagas la sustitución* $x = a$.

Para comprobar esto te propongo un juego: dime en menos de medio segundo el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x}$$

¿Has dudado? ¿Has creído que es una indeterminación tipo $\frac{0}{0}$? Si respondes que sí a estas preguntas es porque has hecho mentalmente la sustitución $x = 0$ en el cociente $\frac{x}{x}$ y has visto lo que no hay.Porque, evidentemente, se tiene que $\frac{x}{x} = 1$, es decir, el límite anterior es el límite de la función constante igual a 1. No hay ninguna indeterminación.

Lo mismo pasa con el siguiente límite $\lim_{x \to +\infty} 1^x$. Si te dejas llevar por la notación y haces mentalmente la sustitución $x = +\infty$, puedes creer que se trata de una indeterminación 1^∞, cuando no lo es porque, evidentemente, $1^x = 1$ es la función constante igual a 1.

Sobre el uso de la notación $\lim\limits_{x\to a}$

¿Cómo evitar que la notación "$\lim\limits_{x\to a}$" "tire de ti" y te lleve a ver lo que no hay?

¿Cómo evitar que la notación "$\lim_{x\to a}$" "tire de ti" y te lleve a ver lo que no hay?Pues simplificando las funciones antes de calcular el límite y no usándola hasta que no hayas visto claramente lo que realmente hay.

Sobre el uso de la notación $\lim_{x \to a}$

¿Cómo evitar que la notación "$\lim_{x \to a}$" "tire de ti" y te lleve a ver lo que no hay?Pues simplificando las funciones antes de calcular el límite y no usándola hasta que no hayas visto claramente lo que realmente hay.

Este es un consejo importante: ***antes de empezar a calcular un límite funcional, simplifica todo lo que puedas la función y no escribas el símbolo "*lim*" hasta que no tengas una idea clara de cómo vas a hacer los cálculos.***

Condiciones suficientes de extremo relativo

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$, y que $f^{(n}(a) \neq 0$. Entonces:

Condiciones suficientes de extremo relativo

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y que $f^{(n}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$, f tiene un *mínimo* ***relativo*** *estricto* en a.

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y que $f^{(n}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$, f tiene un *mínimo **relativo** estricto* en a.
- Si n es par y $f^{(n}(a) < 0$, f tiene un *máximo **relativo** estricto* en a.

Condiciones suficientes de extremo relativo

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y que $f^{(n}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$, f tiene un *mínimo* ***relativo*** *estricto* en a.
- Si n es par y $f^{(n}(a) < 0$, f tiene un *máximo* ***relativo*** *estricto* en a.
- Si n es impar entonces f no tiene extremo relativo en a.

Condiciones suficientes de extremo relativo

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y que $f^{(n}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$, f tiene un *mínimo* ***relativo*** *estricto* en a.
- Si n es par y $f^{(n}(a) < 0$, f tiene un *máximo* ***relativo*** *estricto* en a.
- Si n es impar entonces f no tiene extremo relativo en a.

Condiciones suficientes de extremo relativo

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$, y que $f^{(n}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$, f tiene un *mínimo* ***relativo*** *estricto* en a.
- Si n es par y $f^{(n}(a) < 0$, f tiene un *máximo* ***relativo*** *estricto* en a.
- Si n es impar entonces f no tiene extremo relativo en a.

Este resultado es útil para estudiar extremos relativos pero ***no proporciona condiciones suficientes de extremo absoluto***.

Teorema de Taylor

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos cualesquiera x, a en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto c en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:

$$\boxed{f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Teorema de Taylor

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos cualesquiera x, a en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto c en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:

$$\boxed{f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Suele llamarse *resto de Lagrange* al número:

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Teorema de Taylor

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos cualesquiera x, a en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto c en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:

$$\boxed{f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Suele llamarse *resto de Lagrange* al número:

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Si para una función dada y para valores concretos de a, x, n y $\varepsilon > 0$, podemos probar una desigualdad de la forma

$$\frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1} < \varepsilon$$

Teorema de Taylor

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos cualesquiera x, a en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto c en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:

$$\boxed{f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Suele llamarse *resto de Lagrange* al número:

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Si para una función dada y para valores concretos de a, x, n y $\varepsilon > 0$, podemos probar una desigualdad de la forma

$$\frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1} < \varepsilon$$

Entonces podemos asegurar que $|f(x) - T_n(f,a)(x)| < \varepsilon$, es decir, el error cometido al aproximar $f(x)$ por $T_n(f,a)(x)$ es menor que ε.

Funciones convexas y funciones cóncavas

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Se dice que f es *convexa* en I si para todo par de puntos $x, y \in I$ y para todo t con $0 \leqslant t \leqslant 1$, se verifica que:

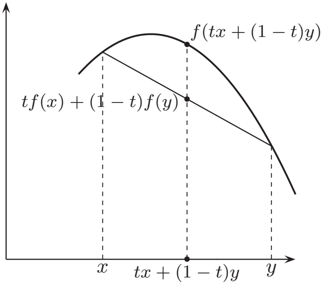
$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

Funciones convexas y funciones cóncavas

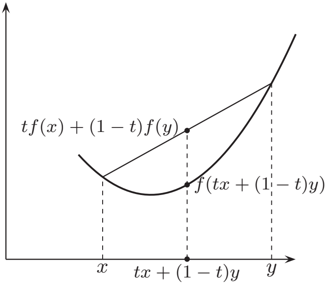
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Se dice que f es *convexa* en I si para todo par de puntos $x, y \in I$ y para todo t con $0 \leqslant t \leqslant 1$, se verifica que:

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

Cuando la desigualdad anterior es estricta para $0 < t < 1$ se dice que f es *estrictamente convexa*. Se dice que f es *cóncava* en I cuando $-f$ es convexa en I y *estrictamente cóncava* cuando $-f$ es estrictamente convexa.



Función cóncava



Función convexa

Condiciones suficientes de convexidad

Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si la derivada de f es creciente (resp. estrictamente creciente) en $]a, b[$ entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a, b]$.

Condiciones suficientes de convexidad

Supongamos que f es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Si la derivada de f es creciente (resp. estrictamente creciente) en $]a,b[$ entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a,b]$.

En particular si f es dos veces derivable en $]a,b[$ y se verifica que $f''(x) \geqslant 0$ (resp. $f''(x) > 0$) para todo $x \in]a,b[$, entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a,b]$.

Condiciones suficientes de convexidad

Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si la derivada de f es creciente (resp. estrictamente creciente) en $]a, b[$ entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a, b]$.

En particular si f es dos veces derivable en $]a, b[$ y se verifica que $f''(x) \geqslant 0$ (resp. $f''(x) > 0$) para todo $x \in]a, b[$, entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a, b]$.

Interpretando la derivada primera como la velocidad y la derivada segunda como la aceleración, las curvas convexas aceleran y las cóncavas frenan.

Puntos de inflexión

Se dice que a es un **punto de inflexión** de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a - r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a + r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

Puntos de inflexión

Se dice que a es un **punto de inflexión** de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a-r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a+r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

Condición necesaria:

Se dice que a es un **punto de inflexión** de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a-r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a+r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

Condición necesaria:

Si f tiene un punto de inflexión en a y es dos veces derivable en a, entonces $f''(a) = 0$.

Puntos de inflexión

Se dice que a es un **punto de inflexión** de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a - r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a + r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

Condición necesaria:

Si f tiene un punto de inflexión en a y es dos veces derivable en a, entonces $f''(a) = 0$.

Condición suficiente:

Puntos de inflexión

Se dice que a es un **punto de inflexión** de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a - r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a + r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

Condición necesaria:

Si f tiene un punto de inflexión en a y es dos veces derivable en a, entonces $f''(a) = 0$.

Condición suficiente:

Si f es tres veces derivable en un punto a y se tiene que $f''(a) = 0$ pero $f'''(a) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en a.

Problemas de optimización

En dichos problemas se trata de calcular el máximo o el mínimo **absolutos** de una magnitud.

Problemas de optimización

En dichos problemas se trata de calcular el máximo o el mínimo **absolutos** de una magnitud.

- Entiende bien el problema. Haz, si es posible, un dibujo o un esquema.

Problemas de optimización

En dichos problemas se trata de calcular el máximo o el mínimo **absolutos** de una magnitud.

- Entiende bien el problema. Haz, si es posible, un dibujo o un esquema.
- Elige las variables y la magnitud, Q, que tienes que optimizar.

Problemas de optimización

En dichos problemas se trata de calcular el máximo o el mínimo **absolutos** de una magnitud.

- Entiende bien el problema. Haz, si es posible, un dibujo o un esquema.
- Elige las variables y la magnitud, Q, que tienes que optimizar.
- Estudia las relaciones entre las variables para expresar la magnitud Q como función de una sola de ellas, $Q = f(x)$.

Problemas de optimización

En dichos problemas se trata de calcular el máximo o el mínimo **absolutos** de una magnitud.

- Entiende bien el problema. Haz, si es posible, un dibujo o un esquema.
- Elige las variables y la magnitud, Q, que tienes que optimizar.
- Estudia las relaciones entre las variables para expresar la magnitud Q como función de una sola de ellas, $Q = f(x)$.
- Las condiciones del problema deben permitir *establecer el dominio* de f.

Problemas de optimización

En dichos problemas se trata de calcular el máximo o el mínimo **absolutos** de una magnitud.

- Entiende bien el problema. Haz, si es posible, un dibujo o un esquema.
- Elige las variables y la magnitud, Q, que tienes que optimizar.
- Estudia las relaciones entre las variables para expresar la magnitud Q como función de una sola de ellas, $Q = f(x)$.
- Las condiciones del problema deben permitir *establecer el dominio* de f.
- Estudia la variación del signo de la derivada de f en su dominio para calcular máximos y mínimos absolutos.

Problemas de optimización

En dichos problemas se trata de calcular el máximo o el mínimo **absolutos** de una magnitud.

- Entiende bien el problema. Haz, si es posible, un dibujo o un esquema.
- Elige las variables y la magnitud, Q, que tienes que optimizar.
- Estudia las relaciones entre las variables para expresar la magnitud Q como función de una sola de ellas, $Q = f(x)$.
- Las condiciones del problema deben permitir *establecer el dominio* de f.
- Estudia la variación del signo de la derivada de f en su dominio para calcular máximos y mínimos absolutos.
- El criterio de la derivada segunda no suele ser útil en este tipo de ejercicios.

Extremos absolutos

Se trata de calcular el máximo o mínimo absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$. Para ello puede seguirse el siguiente procedimiento:

Extremos absolutos

Se trata de calcular el máximo o mínimo absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$. Para ello puede seguirse el siguiente procedimiento:

- Hallar todos los puntos x de $[a, b]$ que o bien son puntos críticos de f o son puntos en los que f no es derivable.

Extremos absolutos

Se trata de calcular el máximo o mínimo absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$. Para ello puede seguirse el siguiente procedimiento:

- Hallar todos los puntos x de $[a, b]$ que o bien son puntos críticos de f o son puntos en los que f no es derivable.
- Calcular el valor de f en cada uno de los puntos obtenidos y también en a y en b.

Extremos absolutos

Se trata de calcular el máximo o mínimo absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$. Para ello puede seguirse el siguiente procedimiento:

- Hallar todos los puntos x de $[a, b]$ que o bien son puntos críticos de f o son puntos en los que f no es derivable.
- Calcular el valor de f en cada uno de los puntos obtenidos y también en a y en b.
- Comparar los valores así obtenidos. El mayor de todos ello será el máximo absoluto de f en $[a, b]$ y el menor será el mínimo absoluto de f en $[a, b]$.